Wiskunde 3, 2002/2003

Toets 1, 11 april 2003

Zet op elk ingeleverd vel duidelijk je naam en je studentnummer. Bladen waarop deze gegevens ontbreken worden niet nagekeken.
De nummers tussen haakjes geven het aantal punten voor die opgave.

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}.$$

1. (a) (8) Bepaal de extremen van de functie

$$f(x, y, z) = (1 - x^2 - y^2)(x - y).$$

   (b) (10) Gebruik een tweede orde test om de aard van de extremen te bepalen.

2. (a) (8) Bepaal de extremen van de functie

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

   onder de voorwaarde

$$g(x, y, z) = z^2 - xy + \frac{3}{4} = 0.$$

   (b) (10) Gebruik een tweede orde test om de aard van de extremen te bepalen.

1a $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x,y,z) \mapsto (1-x^2-y^2)(x-y)$

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = (1-x^2-y^2) - 2x(x-y) = 1-3x^2-y^2+2xy$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -(1-x^2-y^2) - 2y(x-y) = -1+x^2+3y^2-2xy$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$

6/8

$\nabla f = (1-3x^2-y^2+2xy, -1-x^2+y^2-2xy, 0)$

$\nabla f = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 1-3x^2-y^2+2xy=0 \\ -1-x^2+y^2-2xy=0 \end{array}\right\} +$$

$0-4x^2+\cancel{0}+0=0$ $\quad 4y^2 \quad \Rightarrow x = \pm y$

$x=0$

$1-y^2=0 \to y^2=1 \to y=\pm 1$

$-1+y^2=0 \to y^2=1 \to y=\pm 1$

De kritieke punten zijn dus:

$\{(x,y,z) \mid x=0 \wedge y=\pm 1\}$ (z willekeurig)

$f(0,1,z) = (1-0^2-1^2)(0-1) = 0$

$f(0,-1,z) = (1-0^2-(-1)^2)(0-(-1)) = 0$

b $Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x+2y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y+2x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2y-2x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$

8/10

$Hf = \begin{pmatrix} -6x+2y & -2y+2x & 0 \\ -2y+2x & 2y-2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Hf(0,1,z) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Hf(0,-1,z) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hf is in beide gevallen niet postief of negatief definiet, want hij bevat een rij nullen waardoor nooit alle eigenwaarden positief dan wel negatief kunnen zijn. Beide krietieke punten zijn dus zadelpunten.

8/8

2a $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x,y,z) \mapsto (x+y+z)$

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x,y,z) \mapsto (z^2 - xy + \frac{3}{4})$

$g = 0$

$\nabla f = \lambda \nabla g$

$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 1$

$\nabla f = (1, 1, 1)$

$\nabla g = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z})$

$\frac{\partial g}{\partial x} = -y$

$\frac{\partial g}{\partial y} = -x$

$\frac{\partial g}{\partial z} = 2z$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= -\lambda y \\ 1 &= -\lambda x \\ 1 &= \lambda 2z \\ z^2 - xy + \tfrac{3}{4} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \nabla f = \lambda \nabla g$$

$x = y$

$$\left.\begin{aligned} z^2 - x^2 + \tfrac{3}{4} &= 0 \\ x &= -\tfrac{1}{\lambda} \\ z &= \tfrac{1}{2\lambda} \end{aligned}\right\}$$

$z^2 = \frac{1^2}{2^2\lambda^2} = \frac{1}{4\lambda^2}$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{4\lambda^2} - x^2 + \tfrac{3}{4} &= 0 \\ x &= -\tfrac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\}$$

$x^2 = (-\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

$\frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{3}{4} = 0 \}$

$\frac{1}{4\lambda^2} - \frac{4}{4\lambda^2} + \frac{3\lambda^2}{4\lambda^2} = 0$

$\frac{-3 + 3\lambda^2}{4\lambda^2} = 0$

$3\lambda^2 = 3 \rightarrow \lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda = \pm 1$

$\lambda = 1$:	$\lambda = -1$:
$x = -1$	$x = 1$
$y = -1$	$y = 1$
$z = \pm\sqrt{xy - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$z = \pm\sqrt{xy - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \cancel{\frac{1}{2}}\ -\frac{1}{2}$

Kritieke punten zijn dus:

$(-1, -1, \frac{1}{2})$ voor $\lambda = 1$ en $(1, 1, -\frac{1}{2})$ voor $\lambda = -1$

$f(-1, -1, \frac{1}{2}) = -1 - 1 + \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$

$f(1, 1, \frac{1}{2}) = 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$